A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

68

Maggio
2014

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

1. Calcolo mentale-approssimato-strumentale

Gianfranco Arrigo

The article concludes a series of contributions intended to propose the re-evaluation of reasoned calculation, i.e. the mental calculation with the support of algebraic writing and schematic methods showing its conceptual aspect. By approaching the calculation with these techniques it is possible to avoid the learning of Arabic algorithms (or calculation in column) completely, replacing rote learning of rigid algorithms with flexible techniques which leave a lot of room for creativity.

1. Introduzione

Gli algoritmi arabici (i metodi del calcolo in colonna) – introdotti da noi da Leonardo Pisano, detto anche Fibonacci (~1180-~1250) – per il tramite del suo famoso *Liber abaci*, furono usati per circa sette secoli dalla maggior parte dell'umanità. Negli ambienti scientifici e lavorativi furono sostituiti, almeno in parte, dal calcolo logaritmico e dalle calcolatrici meccaniche, a partire dal XVII secolo. Scomparvero del tutto con l'avvento degli strumenti elettronici a basso costo, a cominciare dalle *calcolatrici tascabili* e dai *personal computer*, a partire dagli anni settanta del secolo scorso. Del tutto? No, si praticano ancora, in larga misura, nella scuola elementare.

Chiediamoci perché. Le ragioni sono molteplici. Fra le più ci sembra di poter riconoscere: un certo scetticismo degli insegnanti di fronte alle innovazioni che la didattica propone, la poca propensione di taluni a modificare il proprio insegnamento, la pressione psicologica dei genitori che vorrebbero vedere insegnata ai loro figli la matematica che essi stessi hanno imparato e, non da ultimo, i programmi ufficiali che, salvo eccezioni, continuano a proporre questo modo di calcolare.

Per contro, gli insegnanti che stanno applicando in classe il *calcolo ragionato* sono entusiasti e gli allievi operano con piacere e acquisiscono capacità sorprendenti. Possono benissimo fare a meno del calcolo in colonna.

2. Il calcolo ragionato al posto del calcolo in colonna

Sostituire l'insegnamento del calcolo in colonna con il calcolo ragionato significa tagliare un ramo ingombrante e inutile dell'insegnamento, di natura fondamentalmente algoritmico-mnemonica (la matematica soggiacente è in gran parte nascosta) e promuovere al suo posto un modo di calcolare cosciente e formativo: il calcolo mentale, la scrittura in riga – propedeutica all'apprendimento del calcolo generalizzato, o letterale – e l'impiego di schemi grafici che evidenziano l'aspetto concettuale.

Il calcolo ragionato è fondamentalmente calcolo mentale che si avvale anche del supporto carta-penna. Il suo apprendimento si estende al di fuori dell'algoritmico, abbraccia in gran parte il concettuale, lo strategico, il comunicativo e tocca anche in modo significativo la gestione delle trasformazioni semiotiche (Fandiño Pinilla, 2008). Quindi possiamo affermare senza ombra di dubbio che l'apprendimento del calcolo ragionato è completo e costituisce un'ottima introduzione all'apprendimento dell'algebra elementare; non così si può dire del calcolo in colonna, il cui apprendimento è (quasi) esclusivamente di carattere mnemonico.

Ma c'è di più. L'attività basata sul calcolo in colonna può essere assimilata al compimento di un percorso obbligato, che presenta una serie di regole che occorre memorizzare. Queste però non sono propriamente concetti o procedimenti matematici, ma azioni che, se compiute correttamente, diventano, sì, coerenti con la matematica soggiacente, senza però che l'operatore ne sia cosciente (si pensi, per esempio, all'«abbassare una cifra» nella divisione), per cui si possono eseguire correttamente addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni senza che queste fondamentali operazioni aritmetiche siano concettualmente apprese, senza operare alcuna scelta strategica (perché non c'è nulla da scegliere), senza che vi sia l'esigenza di spiegare il proprio operato ad altri (perché tutti fanno così), senza che vi sia l'opportunità di scegliere un determinato registro semiotico (perché ve n'è uno solo).

La pratica del calcolo ragionato si basa sulla conoscenza ben fondata delle quattro operazioni dell'aritmetica, in particolare delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Si sviluppa soprattutto operando attività di analisi e di sintesi e si nutre continuamente con l'intuizione e l'invenzione. L'allievo impara subito che, di fronte a un calcolo anche semplice, gli conviene prima di tutto decidere *come* fare. Può, per esempio, cambiare registro semiotico operando una *conversione* dall'algebrico allo schematico; o ancora, all'interno di un determinato registro, procedere con un *trattamento* (D'Amore, 2013) scegliendo le strategie che meglio crede. In questo modo accumula esperienza e impara come realmente ci si muove nell'eseguire calcoli. Questo allievo non vedrà di certo la matematica come disciplina rigida, che occorre soprattutto memorizzare («materia arida», come qualcuno la dipinge), ma come un mondo stimolante nel quale impara a muoversi autonomamente, dove incontra oggetti che, compatibilmente alle sue capacità, a poco a poco riesce a scoprire e a situare in una rete concettuale, traendone profitto, meraviglia, soddisfazione e quindi piacere.

3. Che cos'è il «calcolo ragionato»

Lo mostriamo passando in rassegna alcuni esempi significativi. L'impatto di questo modo di praticare il calcolo diventa più importante col procedere delle classi dalla prima alla quinta. Nell'appendice il lettore può prendere visione di una proposta di distribuzione dei contenuti nelle varie classi.

3.1. Addizione e sottrazione

3.1.1. Addizione

Alla base di tutto sta la conoscenza del sistema di numerazione in base 10. All'inizio ci si limita ai numeri naturali e ci si esercita con le scomposizioni additive, in particolare quelle coerenti con la forma polinomiale: unità (u), decine (da), centinaia (h) e migliaia (k)); più tardi, decimi (d), centesimi (c) e millesimi (m). L'uso dei simboli tra parentesi non è strettamente necessario, ma raccomandato. Per esempio:

764 = 700 + 60 + 4 (= 7 h + 6 da + 7 u)

Sono importanti le scomposizioni additive della decina, che presto si estendono alle successive potenze di dieci:

8+2=10, 80+20=100, 800+200=1000

e in seguito 8+20, 80+2, 800+20,…

che si possono anche scrivere con i simboli

8 u + 2 da (= 8 + 20 = 28), 8 da + 2 u,…

e più tardi (per esempio):

8 h + 2 da (= 80 da + 2 da = 82 da = 820), oppure 16 h + 23 u (= 1600 u + 23 u = 1623)

Continuando: 18+2, 8+12, 18+12, 48+52 = 40+8+50+2 = 90+10 = 100,…

Prossimo passo: 7+8=7+(3+5)=(7+3)+5, dove le parentesi servono per spiegare la successione del ragionamento (o altri modi di scomporre), presto estesi ai multipli di dieci e di 100: 70+80, 700+800,…

È sorprendente notare la soddisfazione dei bimbi quando riescono a calcolare con «numeri grandi»! Il coronamento di ciò è l'esecuzione di addizioni usuali in riga, per esempio:

318 + 477 = 300+10+8+400+70+7 = 700+80+15 = 795

anche con più di due addendi

76+123+225 = 70+6+100+20+3+200+20+5 = 300+110+14 = 424

L'addizione in colonna può (forse) rivelarsi più veloce, però col calcolo in riga si guadagna negli aspetti concettuale (imperniato sulla scomposizione polinomiale dei numeri) e strategico (scelta del percorso additivo); inoltre non vi è la difficoltà di ricordare i riporti.

Si impara poi a conoscere le cosiddette *addizioni vincenti*.

Presenza di complementi alla decina o al centinaio o al migliaio.

Uso congiunto delle proprietà associativa e commutativa che permette di stabilire un primo interessante principio: *"per calcolare una somma di più addendi si può iniziare dove si vuole e procedere nell'ordine desiderato; basta considerare tutti gli addendi, ciascuno una sola volta"*. Agli allievi basta conoscere questo principio; non è necessario che sappiano riconoscere subito le singole proprietà. Per esempio

39 + 78 + 11 = (39 + 11) + 70 + 8 = 50 + 70 + 8 = 128

Gli allievi imparano da soli questa tecnica, anche perché «fa fare molto meno fatica».

Presenza di addendi ripetuti.

Da introdurre quando gli allievi sanno le tabelline.

Per esempio

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 6 + 6 =$
$= 5 \times 3 + 3 \times 5 + 6 \times 5 + 4 \times 5 = 15 + 15 + 30 + 20 = 30 + 50 = 80$

Un calcolo come questo non si presta per essere fatto in colonna e risulta arduo da effettuare anche usando una calcolatrice.

Presenza di addendi vicini.

Questa tecnica esige una conoscenza minima della moltiplicazione e della sottrazione.

$702 + 705 + 696 + 710 + 695 = (700 \times 5) + 2 + 5 – 4 + 10 – 5 =$
$= 3500+8 = 3508$

L'esecuzione in colonna è nettamente perdente.

L'abilità nell'eseguire calcoli mentali dev'essere continuamente sviluppata, così come l'abitudine a servirsi della scrittura matematica, almeno inizialmente o di fronte ad addizioni di una certa complessità. Gli allievi più abili giungono presto a eseguire determinate addizioni anche senza scrivere. Importante è che tutti, in un modo o in un altro, in casi semplici o più difficili, ci riescano. E se non si incontrassero casi vincenti? Si creano!

Esempio:

$238 + 584 + 75 = 235 + 3 + 65 + 10 + 584 = (235+65) + (3+10) + 584 =$
$=300 + 584 + 13 = 897$

Il bello è che lo stesso calcolo può essere fatto in molti altri modi, se necessario anche allungando la successione di passaggi, ciò che dà coraggio all'allievo e che lo rende sempre più autonomo.

3.1.2. Sottrazione

La sottrazione nasce insieme all'addizione. Il primo impatto è del tipo: $17 + \ldots = 24$, che può essere risolto per esempio pensando di partire da 17 e di giungere prima a 20 (con +3) e poi a 24 (con +4) trovando il numero sconosciuto 7=3+4. L'apprendimento della sottrazione formale avviene con l'equivalenza tra le due forme $17 + \ldots = 24$ e $24–17 = \ldots$, passaggio delicato perché si deve operare un trattamento all'interno del registro algebrico, con l'introduzione di un nuovo simbolo.

In generale vi sono due tecniche per eseguire una sottrazione:

$73 – 17 = (73 – 10) – 7 = 63 – 7 = (63 – 3) – 4 = 60 – 4 = 56$ (o altre variazioni di questo tipo) oppure

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+50} 70 \xrightarrow{+3} 73 \text{ da cui } 73 – 17 = 3+50+3 = 56$$

La seconda è vivamente raccomandata sia per allievi in difficoltà sia in casi difficili, dove, col calcolo in colonna, occorre operare il «prestito». Chi avesse ancora dubbi, provi a eseguire in colonna la sottrazione 2014–1789 e confronti il metodo col seguente

$$1789 \xrightarrow{+11} 1800 \xrightarrow{+200} 2000 \xrightarrow{+14} 2014 \text{ da cui}$$

2014 – 1789 = 11 + 200 + 14 = 225

Osserviamo che ogni sottrazione può essere trasformata in addizione. Come vedremo in seguito, lo stesso si può dire della moltiplicazione e persino della divisione.

3.2. Moltiplicazione e divisione

3.2.1. Moltiplicazione

Alla base dell'apprendimento vi è la memorizzazione dei prodotti basilari, cioè delle tabelline. Ciò deve avvenire come atto finale di un procedimento di costruzione basato sul concetto di moltiplicazione come addizione di addendi fra loro uguali. Vediamo qualche esempio.

$7 \times 2 = 7 + 7 = 14$; $7 \times 3 = (7 \times 2) + 7 = 14 + 7 = 21$; $7 \times 9 = (7 \times 10) - 7 = 70 - 7 = 63$; …

Se si conosce 7×9, si conosce anche 9×7. Ecco un buon momento per attirare l'attenzione degli alunni sulla commutatività del prodotto.

Come per l'addizione, anche in questo ambito è bene estendere subito il contesto numerico in cui si opera.

Se si sa che $6 \times 8 = 48$, si può calcolare facilmente 60×8; 6×80;
60×80; …

Ma la novità più importante è l'introduzione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto ad addizione e sottrazione.

Per esempio: $13 \times 8 = (10 + 3) \times 8 = (10 \times 8) + (3 \times 8) = 80 + 24 = 104$

Le parentesi superflue possono anche col tempo essere tralasciate: apprendere la gerarchia delle operazioni e l'uso delle parentesi non costituisce un ostacolo insormontabile e può essere compiuto senza fretta.

Per acquisire maggiore abilità nel calcolo mentale, è bene memorizzare anche qualche quadrato oltre alla classica tavola pitagorica:

$11 \times 11 = (10 + 1) \times 11 = 10 \times 11 + 1 \times 11 = 110 + 11 = 121$

$12 \times 12 = 144$; $13 \times 13 = 169$; $15 \times 15 = 225$; $25 \times 25 = 625$

Si possono infine facilmente calcolare i quadrati del tipo: 20×20;
30×30; …

Come per l'addizione, vi sono anche le *moltiplicazioni vincenti*.

$2 \times 5 = 10$;

$2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 100$;

$2 \times 500 = 4 \times 250 = 8 \times 125 = 5 \times 200 = 25 \times 40 = 1000$

Vediamo due esempi:

$8 \times 189 \times 125 = (8 \times 125) \times 189 = 1000 \times 189 = 189'000$

$16 \times 37 \times 125 = (8 \times 2) \times 37 \times 125 = (8 \times 125) \times (2 \times 37) =$
$= 1000 \times 74 = 74'000$

Rimangono però i… casi disperati, per esempio: 552×97

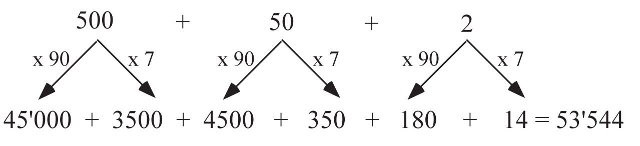
Possiamo cambiare registro semiotico e operare la conversione dall'algebrico allo schematico.

Prima possibilità: mediante la tabella.

	500	50	2
90	45000	4500	180
7	3500	350	14

da cui: 552 × 97 = 45'000 + (4500 + 3500) + (350 + 180) + 14 =
= (45'000 + 8000) + (530 + 14) = 53'544

Seconda possibilità: con uno schema a frecce.



3.2.2. Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, nel senso che, per esempio, da 6x7=42, seguono le due divisioni 42:6=7 e 42:7=6. È uno stimolo in più per rinfrancare la memorizzazione dei prodotti di base.

Se il dividendo supera il centinaio, si opera una scomposizione additiva in due addendi dei quali almeno uno dev'essere multiplo del divisore. Per esempio:

112 : 8 = (80+32) : 8 = (80 : 8) +(32 : 8) = 10 + 4 = 14
115 : 8 = (80+32+3) : 8 = (80 : 8) +(32 : 8) + (3 : 8) = 10 + 4 + (3 : 8) =
= 14 + (3 : 8)
o, se si preferisce, « = 14 resto 3».

Se il divisore ha due cifre, allora i casi sono due:

a) il divisore è scomponibile in un prodotto con fattori diversi da 1 e «comodi». Per esempio:
612 : 18 = (612 : 2) : 9 = 306 : 9 = (270 + 36) : 9 = 270 : 9 + 36 : 9 =
= 30 + 4 = 34

b) altrimenti si può di nuovo operare la conversione al registro schematico, che comporta anche un importante aspetto concettuale: considerare la divisione come successione di sottrazioni di uno stesso numero (il divisore). Quindi calcolare (845 : 65) significa trovare quante volte occorre sottrarre 65 al dividendo 845 fino a ottenere un numero minore di 65 (che è il resto). Gli allievi hanno però imparato che per eseguire una sottrazione è più comodo partire dal sottraendo e procedere additivamente.
Vediamo come si può fare

$$65 \xrightarrow{\text{x}\mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+65\text{x}\mathbf{2}} 780 \xrightarrow{+65\text{x}\mathbf{1}} 845$$

Risultato 845 : 65 = 10+2+1 = 13
Anche la divisione è trasformata in addizione!

Un esempio più difficile e in forma abbreviata. 7236 : 67 = ?

$$67 \xrightarrow{\mathbf{100}} 6700 \xrightarrow{\mathbf{5}} 7035 \xrightarrow{\mathbf{2}} 7169 \xrightarrow{\mathbf{1}} 7236$$

Risultato 7236 : 67 = 100+5+2+1 = 108

Per eseguire la divisione in questo modo è buona cosa essere abili nel moltiplicare un numero di due cifre (il divisore) per 2, 4, 5, 10, 20, 40, 50, 100, 200, 400, 500, 1000, … In sostanza basterebbe saper moltiplicare velocemente per 2, 4 e 5; per gli altri è solo un «gioco di zeri». Moltiplicare per 2 e per 4 ed eventualmente per 8 consiste nel *raddoppiare* (successivamente). Moltiplicare per 5 consiste nel *dimezzare* (dopo aver moltiplicato per 10).

In questo scritto ci siamo limitati a operare nell'insieme dei numeri naturali. I principi e le tecniche del calcolo ragionato sono direttamente estendibili al campo dei numeri razionali. Per esempio:

2,7 × 0,08 = 27 d × 8 c = 27 × 8 m = (20+7) × 8 m = (160+56) m =
= 216 m = 0,216

76 : 0,04 = 7600 : 4 = 3800 : 2 = 1900 oppure 76 : 0,04 =
= (76x25) : (0,04x25) = 1900 : 1 = 1900

Basta sapere che: 10x10=100; 10x100=1000; 0,1x0,1=0,01; 0,1x0,01=0,001;
oppure che: da × da = h, da × c = k, d × d = c, d × c = m.

4. Calcolo approssimato e strumentale

Contrariamente alla tradizione scolastica che ha (quasi) sempre esaltato il risultato esatto o, quando non è possibile, il risultato «con precisione a meno di …», nell'insegnamento odierno assume molta importanza il calcolo approssimato. Questo dev'essere eseguito senza alcun ausilio tecnologico. Nelle attività umane del nostro tempo si usa demandare alla macchina ogni procedimento di calcolo. Dalla cassa registratrice, all'erogatore di carburante, alla calcolatrice tascabile, al personal computer e per finire ai centro di calcolo, disponiamo di apparecchiature sofisticate che ci evitano il compito di eseguire calcoli fastidiosi, facendoci risparmiare energia psichica e tempo. Non sempre, però, si può usare la macchina e non sempre il ricorso a essa è giustificato. In molte situazioni ci si trova a dover farsi un'idea di una certa somma di denaro o di una misura di altra natura, sul momento, senza poter usare alcuno strumento tecnologico. Ma anche quando si esegue un algoritmo con l'ausilio della macchina è assolutamente necessario stimare il risultato che questa ci ritorna e interpretarlo adattandolo alla situazione che si sta considerando. Tutto ciò per evitare di essere in balìa della tecnologia e ancor più per fornire il contributo che solo la mente umana può dare. Eseguire un calcolo approssimato significa operare due interventi: a) arrotondare opportunamente i termini numerici; b) eseguire un calcolo ragionato.

Nel punto a), l'avverbio «opportunamente» va capito bene. Non si tratta solo di rendere più «facili» i numeri, ma anche di fare in modo che con essi si possano facilmente applicare le strategie del calcolo ragionato (ciò che è sempre possibile). Perché il calcolo approssimato deve essere di facile esecuzione. Chi è più abile nel calcolo mentale riesce a ottenere stime più vicine al risultato esatto; ma anche chi opta per arrotondamenti più grossi ottiene stime affidabili. Il calcolo approssimato offre la possibilità a ognuno di agire secondo le proprie capacità.

Esempio: stima della seguente espressione numerica

$17 : (1{,}44 \cdot 3{,}17) \cong 17 : (1{,}5 \cdot 3) = 17 : 4{,}5 \cong 18 : 4{,}5 = 36 : 9 = 4$

Eseguire un calcolo con uno strumento elettronico significa tradurre un'espressione algebrica in una sequenza di comandi espressi nel linguaggio dello strumento.

Esempio di calcolo strumentale:

l'espressione

$17 : (1{,}44 \cdot 3{,}17)$

per l'uso di una calcolatrice tascabile può essere tradotta nella sequenza:

17 ÷ [(1.44 x 3.17)] = 3.72415001

il risultato dato dalla calcolatrice è a sua volta un'approssimazione del valore esatto che qui è un numero razionale il cui periodo si compone di 79 cifre.

Se si usa un foglio di calcolo, l'espressione assume la forma

=A1 / (A2 * A3)

avendo cura di mettere nelle celle A1, A2 e A3 ordinatamente i numeri 17, 1.44, 3.17

Come si vede, nel registro del linguaggio simbolico si possono operare più trattamenti, che a loro volta rafforzano la capacità di usare questi linguaggi.

A questo punto, se il calcolo eseguito è l'espressione risolvente di un problema, occorre interpretare il risultato in funzione di ciò che rappresenta. Se fosse una misura di lunghezza espressa in metri e volessimo la precisione a meno di 1 cm, scriveremmo 3,72 m; se invece fosse la misura in km di un tratto di strada, potremmo adottare il risultato 3,724 km (oppure 3724 m).

Il foglio elettronico potrebbe avere, per esempio, la forma:

dato 1	dato 2	dato 3	risultato
17	1.44	3.17	3.724150018

Il foglio elettronico, rispetto alla calcolatrice, offre il duplice vantaggio di mostrare dati e risultato insieme (in modo da permettere di variare a piacimento i dati e di vedere immediatamente come cambia di conseguenza il risultato) e di esigere l'introduzione di formule in linguaggio algebrico: proprio lo stesso che si impara col calcolo ragionato (e che accompagnerà l'allievo durante l'intero ciclo di studi).

Bibliografia

Arrigo G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 40*. Bellinzona: UIM-CDC. 57-68

Arrigo G. (2012). Sperimentazione sul calcolo numerico: introduzione al calcolo strumentale nella scuola elementare. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 64*. Bellinzona: UIM-CDC. 55-62

D'Amore B. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Bologna: Pitagora

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Appendice

Proposta di programma per l'insegnamento del calcolo[1]

Classi prima e seconda

- Richiamare la sequenza numerica
- Contare in senso progressivo e regressivo (anche a 2 a 2, …)
- Contare oggetti (anche suddividendoli in insiemi equipotenti)
- Collocare e riconoscere i numeri sulla retta numerica
- Leggere e scrivere i numeri in base dieci
- Eseguire addizioni e sottrazioni entro il 10 (all'inizio anche con le dita delle mani)
- Eseguire addizioni e sottrazioni sulla linea dei numeri
- Comporre e scomporre additivamente i numeri fino a 10
- Memorizzare gli amici di 10
- Eseguire addizioni e sottrazioni oltre il 10 con «tappa» alla decina
- Scomporre in decine e unità
- Eseguire addizioni con più addendi, sfruttare la presenza di «amici di 10», scrivendole anche in riga con un primo impiego delle parentesi (che inizialmente possono anche avere la forma di scatolette, casette, …)
- Abituarsi a calcolare addizioni con più di due addendi, iniziando da dove si vuole e procedendo opportunamente con gli addendi rimanenti (uso combinato delle proprietà associativa e commutativa, senza né nominarle né introdurle separatamente).
  Es. $7 + 8 + 3 + 12 = (7 + 3) + (8 + 12) = 10 + 20 = 30$
- Eseguire catene di operazioni con addizioni e sottrazioni
- Raggiungere un numero con una serie di addizioni/sottrazioni.
  Es. $16 = 8 + 4 + 2 + 1 + 1$, $8 = (12 – 2) – 2$
- Addizionare e sottrarre multipli di 10
  Es. $30 + 20 = 50$, $70 + 60 = 130$, …
- Trovare il precedente e il successivo di un numero naturale
- Trovare il doppio e, se esiste, la metà di un numero naturale
- Risolvere problemi di addizione e sottrazione
- Eseguire moltiplicazioni come addizioni ripetute
- Costruire additivamente le tabelline
  Es. $7 \times 3 = 7 \times 2 + 7 = 14 + 7 = 21$
- Eseguire prime divisioni. Es. da $7 \times 8 = 56$ segue $56 : 7 = 8$ e/o $56 : 8 = 7$
- Eseguire divisioni come sottrazioni ripetute e/o additivamente partendo dal divisore. Es. $65 : 13= 5$; additivamente $13 + 13 + 13 + 13 + 13$ oppure $65 – (13 + 13 + 13 + 13 + 13)$
- Risolvere problemi di moltiplicazione e divisione
- Iniziare a memorizzare le tabelline

1. Proposta di Marina Giacobbe, Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi, insegnanti sperimentatrici di Verbania, che hanno già applicato il calcolo ragionato in un ciclo completo di cinque anni.

Classe terza

- Approfondire il sistema numerico decimale e la scomposizione polinomiale di un numero naturale
- Apprendere strategie di calcolo sulle quattro operazioni: scomposizioni additive, scrittura in riga e uso delle parentesi, uso di tabelle e diagrammi a frecce, riconoscere i casi vincenti di addizioni e moltiplicazioni, uso della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, raddoppiare e dimezzare,… (Es. Vedere nell'articolo).
- Eseguire primi esempi di calcolo approssimato e di stima del risultato
- Introduzione ai numeri decimali in situazioni concrete
- Prime addizioni e sottrazioni con numeri decimali

Classi quarta e quinta

- Perfezionare i metodi di calcolo con le quattro operazioni con i numeri naturali e la scrittura in riga, con particolare attenzione all'uso delle parentesi.
- Multipli, divisori, numeri primi e scomposizioni moltiplicative
- Ampliare la conoscenza delle operazioni con i numeri dai naturali ai decimali (in particolare: moltiplicazione fra decine, centinaia, migliaia, decimi, centesimi, millesimi,…)
- Introdurre l'uso della calcolatrice per eseguire sequenze di calcoli (impiego di parentesi, della memoria di deposito e di qualche comando particolarmente utile, a scelta)
- Riprodurre schematicamente un procedimento di calcolo eseguito (o da eseguire) con la calcolatrice
- Risolvere un problema che permetta di usare convenientemente la calcolatrice: tradurre l'iter risolutivo in un'unica espressione numerica, arrotondare opportunamente i valori numerici, eseguire mentalmente una stima del risultato, programmare ed eseguire il calcolo dell'espressione numerica mediante la calcolatrice, confrontare il risultato con la stima, interpretare il risultato secondo la situazione posta dal problema. (Es. Vedere nell'articolo).
- Introduzione all'uso del foglio elettronico. (Es. Vedere nell'articolo).
- Risolvere problemi numerici usando opportunamente le tecniche apprese del calcolo mentale, approssimato o strumentale.